

University of Groningen

Integral Manifolds of the Charged Three-Body Problem

Zaman, Mohammad

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

2017

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Zaman, M. (2017). *Integral Manifolds of the Charged Three-Body Problem*. [Thesis fully internal (DIV), University of Groningen]. Rijksuniversiteit Groningen.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Samenvatting

In dit proefschrift bestuderen we de integraalvariëteiten van het drielichamenprobleem met lading. Ons doel is een wiskundige analyse te geven van het mechanische systeem bestaande uit drie geladen lichamen in de ruimte \mathbb{R}^3 die op elkaar inwerken via een Coulomb potentiaal. Dit fysische systeem wordt wiskundig beschreven als een Hamiltoniaans systeem in een 18-dimensionale faseruimte. Zoals elk N -lichamenprobleem heeft het drielichamenprobleem met lading een grote symmetriegroep en bijgevolg een groot aantal behouden grootheden of *integralen*. De invariantie onder translatie leidt tot drie integralen gegeven door de drie componenten van de lineaire impuls. Wanneer we aannemen dat de totale lineaire impuls gelijk aan nul is, dan is het massamiddelpunt ook behouden en dus komen er drie integralen bij. Vanwege rotatiesymmetrie zijn er nog drie integralen in de vorm van de drie componenten van het impulsmoment. Tenslotte impliceert de afwezigheid van een expliciete tijdsafhankelijkheid dat de energie behouden is. Deze in totaal tien integralen kunnen gezien worden als een afbeelding van de faseruimte naar \mathbb{R}^{10} . De niveauverzamelingen van deze afbeelding van integralen worden *integraalvariëteiten* genoemd. De bifurcaties van de integraalvariëteiten hangen af van slechts één scalaire parameter $\nu = -C^2h$, waarbij C en h de waarden van het impulsmoment, respectievelijk de energie, zijn. Voor niet-kritieke waarden van ν is de integraalvariëteit acht-dimensionaal en glad. Op kritieke waarden kan er een bifurcatie plaatsvinden van de integraalvariëteiten en verandert hun topologie.

Voor het drielichamenprobleem met zwaartekracht is aangetoond dat er negen kritieke waarden zijn voor de parameter ν . Eén daarvan treedt op wanneer de energie nul is (en dus ook ν). De overige kritieke waarden hebben alle een negatieve energie en dus is ν positief. Vier van deze waarden komen overeen met de zogeheten *centrale configuraties*, die bestaan uit de drie collineaire centrale configuraties van Euler en de gelijkzijdige driehoek configuratie van Lagrange. Drie andere kritieke waarden behoren bij kritieke punten op oneindig, waarbij twee lichamen om elkaar heen draaien op een oneindige afstand van het derde lichaam. De negende kritieke waarde komt overeen met een configuratie waarbij

de twee grootste hoofdtraagheidsmomenta aan elkaar gelijk zijn. In het baanbrekende werk van Christopher K. McCord, Kenneth R. Meyer en Qiudong Wang is aangetoond dat de integraalvariëteiten een bifurcatie ondergaan op de eerste acht van deze kritieke waarden en dat er geen bifurcatie is op de laatstgenoemde kritieke waarde. De projectie van de integraalvariëteiten van de faseruimte naar de configuratieruimte definieert de zogeheten *Hill-gebieden*. Het blijkt dat alle acht bifurcaties van de integraalvariëteiten ook bifurcaties van de Hill-gebieden met zich meebrengen.

Ons doel in dit proefschrift is om de kritieke waarden te vinden voor de afbeelding van de integralen van het drielichamenprobleem met lading. Daarnaast bestuderen we of en hoe de Hill-gebieden veranderen op de kritieke waarden. Na een algemene introductie op het probleem in **Hoofdstuk 1** volgen de resultaten van dit proefschrift, die we als volgt kunnen samenvatten:

Hoofdstuk 2 Dit hoofdstuk bevat een korte introductie op N -lichamen-systemen en verschaft de wiskundige achtergrond die nodig is voor het bestuderen van zulke systemen. Omdat een N -lichamen-systeem beschreven kan worden als een Hamiltoniaans systeem, geven we een korte beschrijving van enkele basisfeiten uit de theorie van Hamiltoniaans systemen. Daarnaast introduceren we een klasse van potentialen, die beide de Newton en de Coulomb potentiaal insluit, en de verhouding tussen symmetriën en integralen, wat leidt tot een definitie van de afbeelding van integralen, de integraalvariëteiten en de Hill-gebieden. Ook bespreken we resultaten aangaande de kritieke waarden van de afbeelding van integralen voor het drielichamenprobleem met zwaartekracht.

Hoofdstuk 3 In dit hoofdstuk introduceren we enkele bijzondere oplossingen van N -lichamen-systemen. We geven drie voorbeelden van deze *homografische oplossingen* in het geval van het drielichamenprobleem met zwaartekracht. Deze homografische oplossingen leiden naar het concept van centrale configuraties. We geven verschillende equivalente definities en eigenschappen van centrale configuraties, waarvan sommige afhangen van de homogeniteit van de potentiaal en andere niet.

Hoofdstuk 4 Eén bepaald type kritieke punten van de afbeelding van integralen wordt gegeven door centrale configuraties. In dit hoofdstuk stellen we het aantal collineaire en niet-collineaire centrale configuraties vast in een systeem met drie lichamen. In het collineaire geval bepalen we eerst de door translatie-, rotatie- en dilatatie-symmetrie gereduceerde ruimte van collineaire centrale configuraties (waarbij dilatatiesymmetrie voortkomt uit de homogeniteit van de potentiaal). We tonen aan dat in het speciale geval van twee gelijke massa's de

parameterruimte in dertien gebieden verdeeld is, elk met een verschillend aantal collineaire centrale configuraties. We laten zien dat er precies één niet-collineaire centrale configuratie is als in dit geval ook alle ladingen hetzelfde teken hebben, terwijl er geen niet-collineaire centrale configuraties zijn als dat niet het geval is. Daarnaast zien we dat in het drielichamenprobleem met lading niet alle relatieve evenwichten geprojecteerd worden op centrale configuraties, in tegenstelling tot het drielichamenprobleem met zwaartekracht.

Hoofdstuk 5 Van het drielichamenprobleem met zwaartekracht is bekend dat de integraalvariëteit een bifurcatie ondergaat als gevolg van kritieke punten op oneindig. In dit hoofdstuk geven we de wiskundige theorie om te begrijpen wat een kritiek punt op oneindig is. We volgen daarbij een aanpak van Alain Albouy. We geven verscheidene details en verduidelijken verschillende aspecten van zijn benadering. Vervolgens onderzoeken we het bestaan van kritieke punten op oneindig voor het drielichamenprobleem met lading.

Hoofdstuk 6 Het doel van dit hoofdstuk is het onderzoeken van bifurcaties van de Hill-gebieden in het drielichamenprobleem met lading die plaatsvinden als gevolg van de kritieke punten die in voorgaande hoofdstukken gevonden zijn. Hiertoe bekijken we een abstracte reductie door middel van translatie- en rotatie-symmetrie van Hamiltoniaanse systemen van N lichamen. We laten zien hoe deze reductie expliciet gemaakt kan worden voor drielichamensystemen. De daardoor verkregen ruimte wordt dan verder gereduceerd met behulp van de dilatatiesymmetrie van drielichamensystemen met lading. Het Hill-gebied kan dan gezien worden als een vormruimte voorzien van informatie over de toegestane oriëntaties van het drielichamensysteem voor een gegeven vorm en bewegingsconstanten. Deze werkwijze illustreren we aan de hand van het drielichamenprobleem met zwaartekracht, waarna we twee drielichamenstelsels bestuderen, waarvan de een bestaat uit twee elektronen en een proton en de ander wordt gevormd door het Heliumatoom.

In **Hoofdstuk 7** sluiten we af met conclusies en een vooruitblik.

Vertaling/Dutch translation: Dirk van Kekem
